Terminale S - Correction de l'exercice de mécanique newtonienne

Tir à l'arc

1.a. Dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen, on applique la deuxième loi de Newton au centre d'inertie G de la flèche soumise uniquement à son poids :

$$P = m \cdot a_G \text{ , soit, dans le repère (Ox, Oz) : } -m \cdot g = m \cdot a_G \text{ ou encore, } a_G = g \text{ d'où } \left| \begin{matrix} x \\ z \end{matrix} \right. = \left| \begin{matrix} 0 \\ -g \end{matrix} \right.$$

En projetant cette relation sur l'axe Ox, il vient : $x = 0$ d'où $x = v_{ox} = v_0 \cdot \cos\alpha$ et $x(t) = (v_0 \cdot \cos\alpha) \cdot t + x_0$.
On a donc l'équation horaire du mouvement selon l'axe Ox : $\boxed{x(t) = (v_0 \cdot \cos\alpha) \cdot t}$ (1)

En projetant cette relation sur l'axe Oz, il vient : $z = -g$ d'où $z = -g \cdot t + v_{oz} = -g \cdot t + v_o \cdot \sin\alpha$ et
$z(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + (v_0 \cdot \sin\alpha) \cdot t + z_0$. On a donc l'équation horaire du mouvement selon l'axe Oz :

$$\boxed{z(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + (v_0 \cdot \sin\alpha) \cdot t} \text{ (2)}$$

1.b. De (1), on tire $t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}$ que l'on injecte dans (2) : $\boxed{z(x) = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2 + (\tan\alpha) \cdot x}$ (3).

2.a. Si l'archer tire sa flèche horizontalement, $\alpha = 0°$ et (3) devient $\boxed{z(x) = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2} \cdot x^2}$ (4).

Cherchons à quelle altitude se trouve la flèche dans ces conditions lorsqu'elle atteint l'abscisse x_A = 30,0 m :
$z(x_A) = -\frac{9{,}81}{2 \cdot 30{,}0^2} \cdot 30{,}0^2 = -4{,}91 \text{ m}$ ce qui signifie que la flèche touche le sol avant d'atteindre la cible.

2.b. Lorsque la flèche touche le sol en un point d'abscisse x_{sol}, son altitude vaut $z(x_{sol}) = -h$ d'où, d'après (4), l'équation à résoudre : $z(x_{sol}) = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2} \cdot x_{sol}^2 = -h$ d'où $x_{sol} = \sqrt{\frac{2 \cdot h \cdot v_0^2}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}50 \times 30{,}0^2}{9{,}81}} \quad \underline{16{,}6 \text{ m}}$.
La flèche touche le sol à une distance de 16,6 m du point O.

3.a. Pour que la flèche atteigne la cible en A, il faut que l'altitude z de la flèche pour une abscisse de 30,0 m soit nulle soit $z(x_A) = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x_A^2 + (\tan\alpha) \cdot x_A = 0$ d'où, x_A étant non nulle,
$-\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x_A + (\tan\alpha) = 0$. On obtient alors : $2 \cdot (\tan\alpha) \cdot \cos^2\alpha = \frac{g \cdot x_A}{v_0^2}$ soit $2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{g \cdot x_A}{v_0^2}$ d'où
$\sin(2\alpha) = \frac{g \cdot x_A}{v_0^2}$. On en déduit que $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \sin^{-1}\left(\frac{g \cdot x_A}{v_0^2}\right) \quad \underline{9{,}54°}$. L'archer doit donner à α une valeur de 9,54°.

3.b. Dans ces conditions, à l'aide de (1), on peut calculer la durée t_A : $t_A = \frac{x_A}{v_0 \cdot \cos\alpha} = \frac{30{,}0}{30{,}0 \times \cos(9{,}54°)} \quad \underline{1{,}01 \text{ s}}$.
À la date t_A, on peut calculer $\dot{x}_A = v_0 \cdot \cos\alpha \quad 2{,}96 \cdot 10^1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\dot{z}_A = -g \cdot t_A + v_o \cdot \sin\alpha \quad -4{,}94 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Or $v_A = \sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{z}_A^2} \quad \underline{30{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$.

3.c. Au sommet de la trajectoire, la vitesse de la flèche selon l'axe Oz est nulle d'où, avec t_S la date à laquelle le sommet est atteint : $\dot{z}(t_S) = -g \cdot t_S + v_o \cdot \sin\alpha = 0$ d'où $t_S = \frac{v_o \cdot \sin\alpha}{g} \quad 5{,}07 \cdot 10^{-1} \text{ s}$. On remplace alors dans (2) pour trouver z_S, l'altitude maximale atteinte par la flèche :

$$z_S = -\frac{1}{2} g \cdot t_S^2 + (v_0 \cdot \sin\alpha) \cdot t_S = -\frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2 \cdot g} + \frac{(v_0 \cdot \sin\alpha)^2}{g} = \frac{(v_0 \cdot \sin\alpha)^2}{2 \cdot g} \quad \underline{1{,}26 \text{ m}}.$$

4.a. Si la flèche atteint le point C, alors ses coordonnées vérifient l'équation de la trajectoire, soit : $z(x_C) = r$ d'où, d'après (3) :

$$z(x_C) = -\frac{g}{2 \cdot v_0{}^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x_C{}^2 + (\tan\alpha) \cdot x_C = \frac{-4{,}91}{\cos^2\alpha} + 30{,}0 \cdot (\tan\alpha) = -4{,}91 \cdot \left(1 + \tan^2\alpha\right) + 30{,}0 \cdot (\tan\alpha) = 0{,}30$$

Après réarrangement, cette équation devient $4{,}91 \cdot \tan^2\alpha - 30{,}0 \cdot \tan\alpha + 5{,}21 = 0$. Les solutions sont les suivantes : $\tan\alpha = 5{,}93$ d'où $\alpha \quad 80{,}4°$ ou $\tan\alpha = 1{,}79 \cdot 10^{-1}$d'où $\alpha \quad 10{,}1°$. Le tir le plus direct correspond à un angle de tir de 10,1°.

4.b. Dans ce cas, léquation à résoudre devient $z(x_D) = -r$ soit $4{,}91 \cdot \tan^2\alpha - 30{,}0 \cdot \tan\alpha + 4{,}61 = 0$ dont les solutions sont $\tan\alpha = 5{,}95$ d'où $\alpha \quad 80{,}5°$ ou $\tan\alpha = 1{,}58 \cdot 10^{-1}$d'où $\alpha \quad 8{,}98°$. Le tir le plus direct correspond à un angle de tir de 8,98°.

4.c. Pour que la flèche atteigne la cible, l'archer peut viser entre 10,1° et 8,98°. Il doit donc viser très précisément pour atteindre la cible puisque l'angle de tir ne peut varier que dans une fourchette de 1,12°.